数理解析研究所講究録
608巻 1987年 152-166

Algebraic groups and ω-stable groups

イリノイ大学・神戸大
田中 克己 (Katsumi Tanaka)

1970年代の初めから、数々のmodel theorist達によりω-stable groupという群の研究がされている。その定義はLogicの言葉によるものだが、代数的に大変良い性質を持っている。例えば、全ての代数的閉体上のアフィン代数群は、ω-stableとなる。このノートでは、ホップ代数と関連の有りそうな、いくつかのω-stable groupの問題を紹介する。

ここでは、ω-stable groupの定義は敢えてせず、definable subgroupについての降鎖条件をみたす群として特徴づける。ここで言うdefinableとは、群論を展開するために必要な第一階の述語言語で、記号$+, 0$と論理記号$\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \to$と変数およびパラメーターを用いてdefinableを意味する。

例えば、Gを群、$a \in G$とするとき、

Gの中心$Z(G)$は、 $\forall y(x+y = y+x)$ で、

aの中心化群$C_G(a)$は、 $a+x = x+a$ で、

それぞれ定義される definable subgroup となる。

§1では、構造の definable subset の複雑さを表わす Morley rank を定義する。これは、代数群を考えたときにその次元とほぼ一致する。§2では、ω-stable group についての、いくつかの基本的結果を紹介する。§3では、Morley rank が2以下の群の分類を考える。§4では、有限の Morley rank を持つ単純群についての Cherlin の予想と、これに関する結果を紹介する。

§1. Morley rank

代数幾何では、多様体 V が $n+1$ 次元のとき、それぞれの共通部分が高々 $n-1$ 次元の、無限個の異なる n 次元の部分多様体が存在する。また V が、真部分多様体の和集合として表わせないとき既約であるという。Morley は1965年に、[Mo]の中で、これらの概念を一般化した。一般の構造において、次元に対応する Morley rank を、既約成分の数に対応して Morley degree を次のように定義した。

定義. M を構造とする（必ずしも群構造である必要はない）。X を M の言語の中で M のパラメーターを用いて定義される集合とする。このとき、Morley rank (MR) は次のように定義

される。

(i) $MR(X)=0 \Leftrightarrow X$ は有限；

(ii) $MR(X) \geqq 1 \Leftrightarrow X$ は無限；

(iii) δ が limit ordinal のとき、

$MR(X) \geq \delta \Leftrightarrow MR(X) \geq \alpha$ for all $\alpha < \delta$ ；

(iv) $MR(X) \geq \alpha+1 \Leftrightarrow$ 互いに素な definable subsets X_i, $i<\omega$ が存在して、$MR(X \cap X_i) \geq \alpha$ for all $i<\omega$ ；

(V) $MR(X)=\infty \Leftrightarrow MR(X) \geq \alpha$ for all α。

また、$MR(X) \geq \alpha$ かつ $MR(X) \ngeq \alpha+1$ のとき、$MR(X)=\alpha$ と定義する。

今、$MR(X)=\alpha$ とする。このとき、互いに交わらない definable subsets X_i, $0 \leq i < n$ が存在して、$MR(X \cap X_i) \geq \alpha$, $i<n$ となる。このような最大の n を、X の Morley degree という。

G が ω-stable group のときは、$MR(G)<\infty$ となることが知られている。次の命題は、定義より明らか。

命題. X, Y を構造 M の definable subset とする。

(1) $X \subseteq Y \Rightarrow MR(X) \leq MR(Y)$.

(2) $X \subseteq Y$ かつ $MR(X)=MR(Y) \Rightarrow \deg(X) \leq \deg(Y)$.

§2. ω-stable groups

先に述べたように、ω-stable group は definable subgroup についての降鎖条件をみたす（ω-stable d.c.c.）。このことから、次の定義が意味をもつ。

定義. Gの definable subgroup で $[G:H]$ が有限なもののうち最小の群Hを、Gの既約成分と呼ぶ。このとき、$H=G^{\circ}$ と表わす。特に、$G=G^{\circ}$ のとき、Gは連結であるという。

今、$\{H_i : i\in I\}$ をGの中で指数有限の definable subgroup 全体のクラスとする。$\bigcap_{i\in I} H_i$ を考えると、ω-stable d.c.c. から、ある有限集合 $I_0 \subset I$ が存在して、

$$G^{\circ} = \bigcap_{i\in I} H_i = \bigcap_{i\in I_0} H_i$$

となる。この有限性から、G° は definable となる。また、定義より一意性も明らか。

もちろん $[G:G^{\circ}]$ は有限だが、Cherlin は $[G:G^{\circ}]=\deg(G)$ を示した。また、上と同様の議論により、次が証明できる。

定理. Gを ω-stable group，$X\subset G$ とするとき、ある有限部分集合 $X_0\subset X$ が存在して、$C_G(X)=C_G(X_0)$ が成り立つ。

上の定理は、Baldwin and Saxl [B.S] により一般化され、stable group とよばれる群について成り立つことが知られている。

Macintyre は、ω-stable アーベル群の特徴づけを行なった。

定理([Ma]). G がアーベル群のとき、

G は ω-stable $\Leftrightarrow$ $G \cong D \oplus H$、

ここで、D は divisible, H は exponent 有限。

また、Reineke が [R] で使った共役類についての議論を使うと次のことがわかる。

定理. 無限の ω-stable group は、無限の definable アーベル部分群をもつ。

§3. Morley rank 1 および 2 の群

上の無限アーベル群の存在から、次が直ちに導かれる。

定理. Morley rank が 1 の連結な群は、アーベル群である。

系（[R]）. Morley rank が 1 の 連結な群は、次のいずれかの形をしている：

① $\bigoplus \mathbb{Z}_p$

② $\bigoplus_{I} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{\text{prime}} \left[\bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}(p^\infty) \right]$, $|I| \geq 0$, $|I_p| < \omega$.

代数群では、一次元の連結群は $\mathbb{G}_a$ か $\mathbb{G}_m$ に限ることが知られているが、これらは上の①か②の形をしている。また、Prüfer 群 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ は代数群とは同型にならない。

一般に代数群においては、その次元と Morley rank がほぼ一致することが知られているが、標数 p の代数的閉体上の代数群 $\mathbb{G}_a \oplus \mathbb{G}_a$ は二次元だが、群としては $\bigoplus \mathbb{Z}_p$ に同型となり Morley rank は 1 になる。

次に Morley rank が 2 の群の分類を考える。Cherlin は [C] で 以下の結果を得た。

定理. Morley rank が 2 の連結群は 2-step の可解群である。

この定理から、Morley rank が 2 の連結群は、次のいずれかになる。

I. アーベル群

II. 可解で centerless

III. 可解で中心が有限

IV. 2-step のベキ零群

二次元の連結代数群も上の I〜IV のいずれかになる。

上の I の場合は、§2 のアーベル群の特徴づけの意味で分類は終わっている。 II については、Cherlin が先の論文で次の結果を与えている。

定理. G が Morley rank 2 の連結可解群で中心が trivial ならば、ある代数的閉体 K が存在して、

$$G \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \ a \in K,\ b \in K^{\bullet} \right\}.$$

証明. $[G,G]$ を U とおくと、U は Morley rank 1 の連結な正規アーベル群となる。 今、$C_G(b)$ が無限となる元 b を $G - C_G(U)$ から選び、$C_G(b)^0$ を T とする。 $U \cap T$ は有限だから、$MR(UT) = 2$ となり、$G = UT$ がわかる。 さらに G は centerless だから、$U \cap T = 1$ となり、

$$G = U \rtimes T \ .$$

今、U を加法的に、T を乗法的に書くことにする。

$$t \cdot u = tut^{-1} \quad \text{for} \quad t \in T,\ u \in U$$

と定義する。したがって $1_G = 0_U$ 。

Gは連結でcenterlessだから、$a \in G-1$ にたいし、$[G : C_G(a)] = \infty$ となる。よって全ての nontrivial な共役類は無限となる。Uは連結で rank 1 だから、$U-1$ はGの中で一つの共役類となる。$u \in U-1$ にたいし、$U-1$ の任意の元は $t \cdot u$ $(t \in T)$ という形をしている。

今、$u \in U-1$ を fix する。このとき、$C_G(u) = U$ となる。map $\hat{}: t \mapsto \hat{t} = t \cdot u$ はTから$U-1$への bijection となる。Tに特別な元0を付け加えて、Tの multiplication を

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

として、$F = T \cup \{0\}$ の上へ拡張してやる。F上の加法を

$$(x+y)\hat{} = \hat{x} + \hat{y}$$

で定義する。すると$+$はF上可換で associative な operation になり、逆元は、

$$(-x)\hat{} = -x$$

で定義する。さらに、

$$(z(x+y))\hat{} = z \cdot (x+y)\hat{} = z \cdot (\hat{x} + \hat{y}) = \widehat{zx} + \widehat{zy} = (zx+zy)\hat{}$$

となり、FはG上解釈された体となる。『ω-stable な体は代数的閉体に限る。』というモデル理論の結果から、Fは代数的閉体であることがわかる。uを $1 \in F_+$ と同一視すれば、$U = F_+$、$T = F^\bullet$ となり、$G = F_+ \rtimes F^\bullet$ がいえる。 $\boxed{終}$

この証明のポイントは、operationが一つしかない群の構造の中に、いかにoperationを二つもつ体の構造を解釈するかにある。 これは、モデル理論の中でも重要な問題の一つである。 他にも、Mal'cev対応、Thomasの方法等 知られているが、Cherlinの議論を一般化した次のZil'berの結果は、他の問題とも関連して、大変重要である。

定理([Z])。 Gが有限のMorley rankをもつ連結可解群で、ベキ零でなければ、その中に代数的閉体を解釈する。

Ⅲの場合は、$G/Z(G)$ を考えれば Ⅱ に帰着する。後は Ⅳ の場合さえ考えてやればよい。 Ⅳのクラスに関しては、Cherlinの次の結果がある。

定理. GをMorley rank 2 の連結ベキ零群で可換でないとする。 このとき、Gのexponentは 素数 p か p^2 になる。

更に、この群の構造を考えてみる。 中心の連結成分 Z とその剰余群 G/Z は、ともに $\oplus \mathbb{Z}_p$ という形をしている。ここで、群Gは 2-stepベキ零群だから、元 $x \in G - Z(G)$ をfix したとき、写像 $f_x : G \to Z$ via $G \ni y \mapsto [x,y] \in Z$ は、

準同型写像となる。 この写像は definable だから、その核 $\operatorname{Ker} f_x = C_G(x)$ は definable subgroup となる。 $MR(C_G(x)) = MR(Z) = 1$ かつ $C_G(x) \supset Z$ より、$[C_G(x) : Z]$ は有限となる。よって $|C_G(x)| = |Z|$ となり $|G| = |Z|$ がわかる。

ここで、Morley rank 2 の連結、2-step べキ零群の構成を考える。 今までの類似性から、代数群を考えるのが妥当だろう。

Z と G/Z は $\oplus \mathbb{Z}_p$ という形をしているから、ある標数 p の代数的閉体 K の加法群と考える。 したがって、

$$0 \to K_+ \to G \to K_+ \to 0$$

という central extension を考えてやればよい。 この群は、Kambayashi - Miyanishi - Takeuchi の [KMT] の中で詳しく考察されている。 一般に、G は $K \times K$ 上に operation を次のように定義したものになる。

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a+c,\ b+d+f(a,c)).$$

ここで、2-cocycle $f : K \times K \to K$ は次の条件をみたす。

① $f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, z)$,

② $f(x, 0) = f(0, x) = 0$.

例 1. $f(x,y) = x^p y$ とすると、群 G は代数群 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^p & y \\ & 1 & x \\ & & 1 \end{pmatrix} ; x, y \in K \right\}$ と同型。

例2.　$f(x,y)=x^{p^m}y^{p^n}$、$m\neq n$。

上の例はともに群のexponentがpになる。一般にfがbiadditiveのとき、Gのexponentはpになる。次にexponentがp^2の例を与える。

例3.　$f(x,y)=x^py+\frac{1}{p}\left[(x+y)^p-x^p-y^p\right]$,
$\mathbb{Z}$-polynomialとして定義する。

クラスIVの分類に向けて、次のことが問題となる。

問題.　上の構成において、Kは代数的閉体でなければいけないか。

問題.　Morley rank 2の連結な2-stepベキ零群は代数群か。

問題.　上の群の中に代数的閉体は解釈できるか。

この一年の間に、最後の問題に対して次の部分解が得られた。

定理.　例1～3の群の中に代数的閉体が解釈できる。

証明.　ここでは例1についての方法を与える。方針としては、$G/Z(G)$の中に代数的閉体$\langle G/Z(G),\oplus,\otimes\rangle$を解釈する。

$\oplus$は群のoperationにより自然に与えられる。以下に、乗法$\otimes$の解釈を与える。

パラメーターとして$(1,0)$, $\bar{1}$と記す, を使う。今、$(x,-)$, $(y,-)$, $(a,-)$, $(b,-)$という形のGの元をそれぞれ$\bar{x},\bar{y}$, $\bar{a},\bar{b}$と書くことにする。

$$[\bar{x},\bar{a}]=[\bar{y},\bar{1}] \wedge [\bar{x},\bar{1}]=[\bar{y},\bar{b}]$$

というformalな式は、体Kの中で、

$$(*)\quad \begin{cases} x^p a - x a^p = y^p - y \\ x^p - x = y^p b - y b^p \end{cases}$$

を意味する。$(*)$から、

$$y = \frac{1}{b-b^p}\left(x^p - x - x^p ab + x a^p b\right)$$

が導かれ、$(*)$からyを消去すると、

$$(1-a^p b^p)x^{p^2} + (\cdots)x^p + \left(a^p(b-b^p)^p + (b-b^p)^{p-1}(1-a^p b^p)\right)x = 0$$

を得る。

$a,b \notin \{0,1,2,\cdots,p-1\}$なる$a,b$にたいし、

$$ab = 1 \Leftrightarrow (*)\text{の解の数} < p^2。$$

$G/Z(G)$上に"$a\cdot b=1$"を意味する述語$R(a,b)$を

$$R(a,b) \Leftrightarrow [a,b \in \{1,\cdots,p-1\} \wedge b = a^{p-2}]$$
$$\vee [a,b \notin \{0,1,\cdots,p-1\} \wedge (*)\text{の解の数} < p^2].$$

と定義できる。右側はformalに表現することができる。

このとき、

$$\overline{w} = \overline{u} \otimes \overline{v} \iff \begin{cases} \left[\overline{x}, \dfrac{1}{\overline{u}+\overline{v}}\right] = [\overline{y}, \overline{1}] \wedge \left[\overline{x}, \dfrac{1}{\frac{1}{\overline{u}}+\frac{1}{\overline{v}}}\right] = [\overline{z}, \overline{w}] & \\ \quad \text{の解の数} < p^2 & \text{if } \overline{u}\cdot\overline{v} \neq \overline{1} \\ \overline{w} = \overline{1} & \text{if } \overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{1} \end{cases}$$

と定義すると、右側は formal に表現できる。 これで $\otimes$ は解釈されることがわかった。

ひとたび群の中に代数的閉体 K が解釈されたら、その群が K 上の代数群となることを示すのは、モデル理論の問題と言うよりも、むしろホップ代数の問題となるだろう。

§4. 単純群

これまで見て来たように、代数群と ω-stable group は大変似た性質をもつ。 このことから Cherlin は次の予想をたてた。

Cherlin の予想． Morley rank 有限の ω-stable な単純群は、代数的閉体上の代数群と同型になる。

これについては、S. Thomas [T] が locally finite の場合に有限単純群の分類を使って証明したが、一般の場合はまだ未解決である。 このむずかしさは、ω-stable 単純群に Borel subgroup の一般論が無いことによる。 §3 の終わりに述べ

たように、群の中に代数的閉体を解釈することを考える。

H を ω-stable group G の部分群（definableでなくともよい）とする。このとき、H を含む G の最小の definable subgroup が一意に存在する。（証明は連結成分のときと同様）これを H の model closure とよび $\tilde{H}$ と記す。これに関して、Zil'ber の結果がある。

定理. H を ω-stable group G の可解（ベキ零）部分群とすると、$\tilde{H}$ も可解（ベキ零）。

したがって、ω-stable group の極大可解（ベキ零）部分群は definable である。§2の最後の定理から、それらのうちに無限のものが存在することがわかる。もしその definable な可解群がベキ零でなければ、§3の Zil'ber の定理から、群は代数的閉体を解釈する。しかしながら、今のところ Morley rank 3 の単純群についてさえ、$PSL(2,K)$, K は代数的閉体、以外に存在するかどうかも知られていない。

参考文献

[B.S] J. Baldwin and J. Saxl, Logical stability in group theory. J. Austr. Math. Soc., vol. 21 (1976) 267-276.

[C] G. Cherlin, Groups of small Morley rank, Ann. of Math. Logic 17 (1979) 1-28.

[KMT] T. Kambayashi, M. Miyanishi and M. Takeuchi. Unipotent Algebraic Groups. LNM 414. Springer.

[Ma] A. Macintyre, On ω_1-categorical theories of abelian groups. Fund. Math. 70 (1971), no. 3, 253-270.

[Mo] M. Morley, Categoricity in power. Trans. A.M.S. 114 (1965) 514-538.

[R] J. Reineke, Minimal Gruppen. Z. Math. Logic Grundlagen Math. 21 (1975) 357-359.

[T] S. Thomas, Classification theory of simple locally finite groups. PhD Thesis, University of London 1983.

[Z] B. Zil'ber, Groups and Rings with categorical theories (in Russian). Fund. Math. 95 (1977), 173-188.